



UNIVERZITET U NIŠU
FAKULTET ZAŠTITE NA RADU U NIŠU



OSNOVI MAŠINSTVA

- PREZENTACIJA BR. 14 -

Dr Darko Mihajlov, vanr. prof.

SADRŽAJ PREZENTACIJE

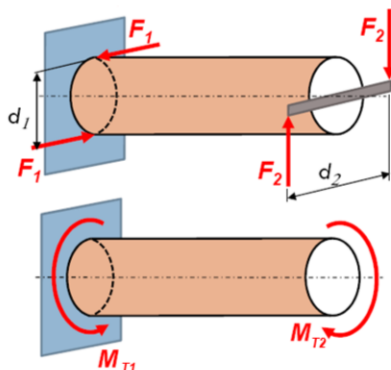
UVIJANJE ŠTAPA KRUŽNOG POPREČNOG PRESEKA

- ♦ Osnovni pojmovi i pretpostavke u slučaju uvijanja;
- ♦ Deformacija usled uvijanja štapa kružnog preseka;
- ♦ Napon usled uvijanja štapa kružnog preseka;
- ♦ Dimenzionisanje štapa kružnog i prstenastog poprečnog preseka napregnutog na uvijanje.



OSNOVI MAŠINSTVA

Osnovni pojmovi i pretpostavke



Čisto uvijanje štapa pod dejstvom koncentrisanih momenata uvijanja

$$M_T \neq 0; \quad M = 0; \quad T = 0; \quad N = 0.$$

OSNOVI MAŠINSTVA

Uvijanje (torzija) je naprezanje štapa pod dejstvom spoljašnjih spregova sila koji djeluju u ravnima upravnim na osu štapa.

Čisto uvijanje je naprezanje štapa na čijim krajevima djeluju sile koje se redukuju na spregove sila u ravnima krajeva štapa, *jednakih* momenata a *suprotnih* smerova.

Momenti ovih spregova sila se nazivaju **momenti uvijanja** ili **momenti torzije** i označavaju sa M_T .

Opterećenje nosača suprotno usmerenim momentima uvijanja izaziva međusobno zakretanje poprečnih preseka nosača za **ugao uvijanja** ϑ .

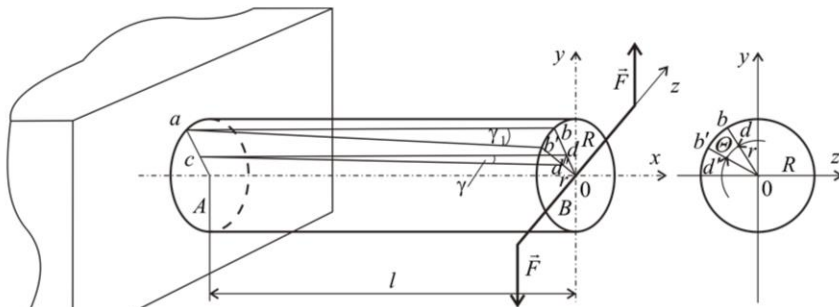
Unutrašnje sile u poprečnim presecima štapa se prilikom uvijanja redukuju **samo na spregove sila** u ravnima preseka štapa. Ostale komponente unutrašnjih sila - moment savijanja, transverzalna sila i normalna sila, **jednake su nuli**.

Presečne sile su u svim presecima jednake, pa se može pretpostaviti da su i naponi u svim presecima **jednaki**, tj. da ne zavise od koordinate duž ose štapa.

Analiza napregnutog nosača opterećenog na uvijanje se zasniva na sledećim **pretpostavkama**:

1. Poprečni preseki štapa se u procesu deformacije zaokreću kao kruta tela i ostaju ravni i normalni na uzdužnu osu štapa;
2. Osa štapa ostaje prava i posle deformacije;
3. Rastojanja između poprečnih preseka se ne menjaju usled deformacije;
4. Poluprečnici u proizvoljnom poprečnom preseku u procesu deformacije ostaju pravi (neiskrivljeni) i zaokreću se za isti ugao;
5. U poprečnim presecima štapa se u procesu deformacije javljaju samo tangencijalni (smičući) naponi; Normalni naponi su jednaki nuli.

Deformacija usled uvijanja štapa kružnog preseka



$$\left. \begin{aligned} s_1 = bb' = l\gamma_1 = R\Theta \\ s = dd' = l\gamma = r\Theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\gamma}{\gamma_1} = \frac{r}{R} \\ \Theta = \frac{\gamma_1 l}{R} = \frac{\gamma l}{r} \end{cases}$$

$r = 0 \Rightarrow \gamma = \gamma_0 = 0$; $r = R \Rightarrow \gamma = \gamma_1 = \gamma_{\max}$

↓
Vlakno ose štapa se ne deformiše;

⇒ Odnos uglova klizanja γ i γ_1 srazmeran je odnosu udaljenja vlakana od ose štapa;
 ⇒ Najviše se deformiše poprečni presek na slobodnom kraju štapa;
 ⇒ Najviše se deformišu vlakna na cilindričnom omotaču štapa;

OSNOVI MAŠINSTVA

Ako je štap AB , dužine l , kružnog poprečnog preseka, poluprečnika R , u levoj osnovi A uklješten, a na slobodnom kraju B opterećen spregom sila koji deluje u samoj ravni poprečnog preseka, onda je izložen **uvijanju usled momenta uvijanja**.

Vlakno ab na omotaču cilindra zaokreneće se oko tačke a za neki **ugao klizanja** γ_1 i preći će u položaj ab' . Poluprečnik Ob preseka B će se tom prilikom zaokrenuti za mali ugao Θ koji se naziva **ugao uvijanja štapa**.

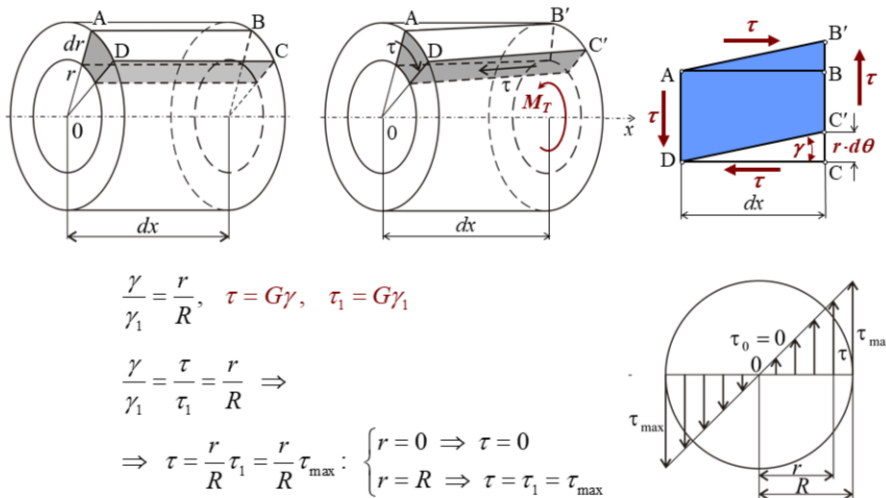
Vlakno cd na rastojanju r od geometrijske ose Ax zaokreneće se takođe za neki mali **ugao klizanja** γ kome odgovara luk dd' preseka B .

Sprovedena analiza ukazuje na sledeće zaključke:

- Odnos uglova klizanja γ i γ_1 srazmeran je odnosu udaljenja vlakana od ose štapa;
- Najviše se deformiše poprečni presek na slobodnom kraju štapa;
- Vlakno ose štapa se ne deformiše;
- Najviše se deformišu vlakna na cilindričnom omotaču štapa.

Napon usled uvijanja štapa kružnog preseka - veza između napona i klizanja -

Deformacija elementarne zapremine usled uvijanja



OSNOVI MAŠINSTVA

Radi uspostavljanja odnosa između napona i deformacije (klizanja), izdvoji se element dužine dx iz štapa. Element je ograničen bliskim koaksijalnim cilindrima poluprečnika r i $r+dr$, i dvema bliskim meridijanskim ravnima. Izdvojeni element se može smatrati elementarnom zapreminom.

Vlakna koja su paralelna osi vratila prelaze u nove položaje posle deformacije, tako da pravougaoni deo spoljašnjeg cilindra postaje paralelogram, odn. pravi uglovi su se promenili (smanjili ili povećali) za ugao γ . Taj ugao promene pravog ugla predstavlja **klizanje** ovog pravougaonika koji je napregnut na **smicanje**.

Prema tome, u bočnim ravnima će dejstvovati **tangencijalni naponi**.

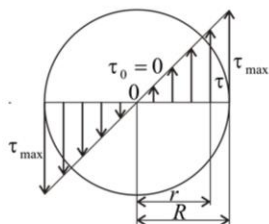
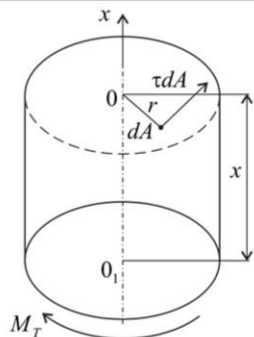
Prema zakonu o konjugovanosti napona, tangencijalni naponi će dejstvovati i u ravnima osnova elementarne zapremine.

Na ovaj način se problem uvijanja svodi na problem **čistog smicanja**.

Budući da je odnos uglova klizanja γ i γ_1 srazmeran odnosu udaljenja vlakana od ose štapa, kao i da za **čisto smicanje** važe relacije: $\tau = G\gamma$ i $\tau_1 = G\gamma_1$, moguće je napisati izraz za promenu vrednosti tangencijalnog napona u funkciji rastojanja r od ose štapa.

Dakle, centralna vlakna ($r = 0$) **nisu napregnuta** i ne deformišu se, a periferna vlakna ($r=R$) su **najnapretnutija**. Tangencijalni napon se linearno menja sa radijusom.

Napon usled uvijanja štapa kružnog preseka - veza između napona i momenta uvijanja -



$$(1) dM_T = r \tau dA$$

$$(2) \Sigma M_x = M_T - \int_{(A)} r \tau dA = 0, \quad \tau = \frac{r}{R} \tau_{\max} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_T - \int_{(A)} r \frac{r}{R} \tau_{\max} dA = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_T = \frac{\tau_{\max}}{R} \int_{(A)} r^2 dA \Rightarrow M_T = \frac{\tau_{\max}}{R} I_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tau_{\max} = \frac{M_T}{I_0} R = \frac{M_T}{\frac{I_0}{R}} = \frac{M_T}{W_0} \quad W_0 = \frac{I_0}{R}$$

**W_0 [cm³] - Polarni otporni moment
kružnog poprečnog preseka;**

OSNOVI MAŠINSTVA

Po Metodi preseka, štap se preseče proizvoljnom ravni, upravnom na uzdužnu osu štapa, i posmatra ravnoteža odsečenog dela. Uticaj uklonjenog dela se zameni silama koje se redukuju tako da se suprotstave dejstvu momenta uvijanja.

U poprečnom preseku štapa, element površine dA , na rastojanju r od ose vratila, napada unutrašnja sila τdA . Poprečni presek sadrži beskonačno mnogo elementarnih površina dA , na različitim rastojanjima od ose x , i svaku napada unutrašnja sila.

Elementarne unutrašnje sile leže u ravni poprečnog preseka, a pravci su im upravni na odgovarajući radijus r . Moment dM_T elementarne unutrašnje sile τdA u odnosu na osu vratila je $dM_T = r \cdot \tau dA$.

Rezultujući moment je u ravnoteži sa spoljašnjim momentom uvijanja. Jednačina ravnoteže zbira momenata spoljašnjih i unutrašnjih sila za osu x data je izrazom (2).

Transformacijom izraza (2), na kraju se dobija najveća vrednost tangencijalnog napona $\tau_{\max}$ koji se javlja u vlaknima na obodu cilindrične površi radijusa R .

Napon usled uvijanja štapa kružnog preseka - veza između napona i momenta uvijanja -

$$\left. \begin{array}{l} \tau = \frac{r}{R} \tau_{\max} \\ \tau_{\max} = \frac{M_T}{I_0} \cdot R \end{array} \right\} \Rightarrow \tau = \frac{r}{R} \cdot \frac{M_T}{I_0} \cdot R = \frac{M_T}{I_0} \cdot r$$

$$\tau = \frac{M_T}{I_0} \cdot r$$

Veza između tangencijalnog napona i spoljašnjeg opterećenja
(momenta uvijanja) - **druga glavna jednačina uvijanja**

OSNOVI MAŠINSTVA

Tangencijalni napon u bilo kom vlaknu preseka na rastojanju r od ose štapa, a u preseku štapa gde je poznat spoljašnji moment uvijanja, dat je izrazom (1). Ubacivanjem izraza (2) u izraz (1) dobija se veza između tangencijalnog napona i spoljašnjeg opterećenja (momenta uvijanja) - **druga glavna jednačina uvijanja**.

Napon usled uvijanja štapa kružnog preseka - veza između ugla uvijanja i momenta uvijanja -

$$\left. \begin{array}{l} (1) \quad \tau = G\gamma \\ (2) \quad \tau = \frac{M_T}{I_0} \cdot r \end{array} \right\} \Rightarrow G\gamma = \frac{M_T}{I_0} \cdot r \Rightarrow \gamma = \frac{M_T}{GI_0} \cdot r \quad (3)$$

$$(4) \quad \Theta = \frac{\gamma l}{r} \Rightarrow \Theta = \frac{M_T}{GI_0} l = \frac{M_T}{\mathfrak{I}} l$$

Veza između ugla uvijanja i spoljašnjeg opterećenja
(momenta uvijanja) - **prva glavna jednačina uvijanja**

$\mathfrak{I} = GI_0$ - **krutost pri uvijanju (torziona krutost) [Nm²]**

$\Theta^* = \frac{\Theta}{l} = \frac{M_T}{\mathfrak{I}}$ **redukovani ugao uvijanja u odnosu na
jedinicu dužine (relativni ugao uvijanja)**

OSNOVI MAŠINSTVA

Izjednačavanjem desnih strana izraza (1) i (2) dobija se izraz (3) za ugao uvijanja u funkciji rastojanja r od ose štapa.

Ubacivanjem izraza (3) u izraz (4) dobija se veza između ugla uvijanja i spoljašnjeg opterećenja (momenta uvijanja) - **prva glavna jednačina uvijanja**.

Dimenzionisanje štapa kružnog poprečnog preseka napregnutog na uvijanje

$$\tau_{\max} = \frac{M_{T\max}}{W_0} \leq \tau_{dt} \Rightarrow W_0 \geq \frac{M_{T\max}}{\tau_{dt}};$$

$$W_0 = \frac{I_0}{R}, \quad I_0 = \frac{\pi R^4}{2} \Rightarrow W_0 = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}; \quad R = \frac{d}{2}$$

$$W_0 = \frac{\pi d^3}{16} \geq \frac{M_{T\max}}{\tau_{dt}} \Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{T\max}}{\pi \tau_{dt}}};$$

OSNOVI MAŠINSTVA

Dimenzionisanje se vrši prema **uslovu otpornosti**, a to je da najveća vrednost napona ne sme da bude veća od odgovarajuće dozvoljene vrednosti napona: $\tau_{\max} < \tau_{dt}$.

Dozvoljeni napon na uvijanje τ_{dt} zavisi od vrste materijala i od stepena sigurnosti.

Za dimenzionisanje poprečnog preseka štapa se bira presek u kome je moment uvijanja najveći.

Dimenzionisanje štapa prstenastog poprečnog preseka napregnutog na uvijanje

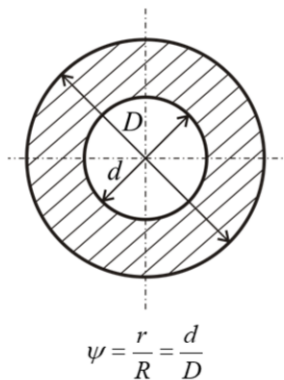
$$\tau_{\max} = \frac{M_{T\max}}{W_0} \leq \tau_{dt} \Rightarrow W_0 \geq \frac{M_{T\max}}{\tau_{dt}};$$

$$W_0 = \frac{I_0}{R} = \frac{I_0^{(1)} - I_0^{(2)}}{R} = \frac{\frac{\pi R^4}{2} - \frac{\pi r^4}{2}}{R} =$$

$$= \frac{\pi R^3}{2} (1 - \psi^4) = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \psi^4);$$

$$W_0 = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \psi^4) \geq \frac{M_{T\max}}{\tau_{dt}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d \geq \sqrt[3]{\frac{16 M_{T\max}}{\pi \tau_{dt} (1 - \psi^4)}};$$



OSNOVI MAŠINSTVA

Kontrolna pitanja 14



1. Objasniti opšte pojmove i pretpostavke u slučaju uvijanja štapa kružnog poprečnog preseka.
2. Deformacija u slučaju uvijanja štapa kružnog poprečnog preseka;
3. Izvesti relaciju koja predstavlja vezu između ugla uvijanja i ugla klizanja.
4. Na osnovu veze između napona i klizanja (Hukovog zakona kod smicanja), izvesti izraz za tangencijalni napon u funkciji od poluprečnika poprečnog preseka i to grafički prikazati.
5. Izvesti glavne jednačine uvijanja i objasniti ih.
6. Objasniti način dimenzionisanja štapa kružnog i prstenastog poprečnog preseka napregnutog na uvijanje.